22137226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Viernes 10 de mayo de 2013 (mañana)

2 horas

Código del examen

2	2	1	3	–	7	2	2	6

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

0116

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

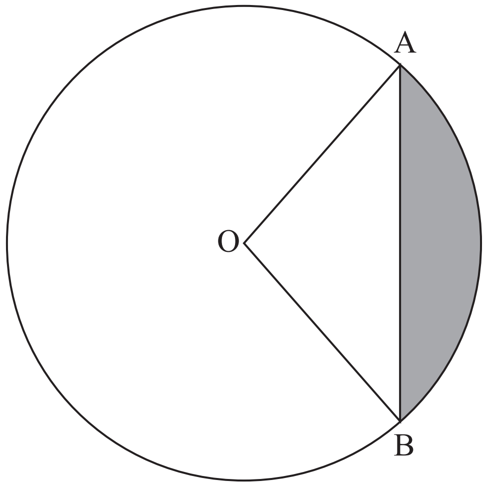
SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Un círculo de 4 cm, de radio y centro O se corta mediante una cuerda [AB], de 6 cm de longitud.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$, expresando la respuesta en radianes y con una aproximación de cuatro cifras significativas. *[2 puntos]*

(b) Determine el área de la región sombreada. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0{,}1x - 1{,}7y + 0{,}9z &= -4{,}4 \\ -2{,}4x + 0{,}3y + 3{,}2z &= 1{,}2 \\ 2{,}5x + 0{,}6y - 3{,}7z &= 0{,}8. \end{aligned}$$

(a) Exprese el sistema de ecuaciones en forma matricial. *[2 puntos]*

(b) Halle la solución del sistema de ecuaciones. *[3 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Se cree que los tiempos de vida de los gatos de raza Manx siguen una distribución normal, de media 13,5 años y varianza 9,5 años^2.

(a) Para estos gatos Manx, calcule el rango de tiempos de vida situados a menos de una desviación típica de la media. *[2 puntos]*

(b) En una población de 10 000 gatos Manx, estime cuántos tendrán un tiempo de vida inferior a 10 años. Dé la respuesta aproximada al número entero más cercano. *[3 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Halle $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$. *[4 puntos]*

(b) Determine el valor de m, sabiendo que $\int_0^m x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = 0{,}5$, donde $m > 0$. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 6]*

En la progresión aritmética $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, el primer término es $u_1 = 1,6$ y la diferencia común es $d = 1,5$. En la progresión geométrica $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, el primer término es $v_1 = 3$ y la razón común es $r = 1,2$.

(a) Halle una expresión para $u_n - v_n$ en función de n. *[2 puntos]*

(b) Determine el conjunto de valores de n para los cuales $u_n > v_n$. *[3 puntos]*

(c) Determine el mayor valor de $u_n - v_n$. Dé la respuesta con una aproximación de cuatro cifras significativas. *[1 punto]*

6. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Resuelva la ecuación $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0$, donde $0 \le x \le 180^\circ$, y exprese la(s) respuesta(s) aproximadas al número entero de grados más cercano. *[3 puntos]*

(b) Halle los valores exactos de $\sec x$ que satisfacen la ecuación $3\sec^4 x - 8\sec^2 x + 4 = 0$. *[3 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. *[Puntuación máxima: 7]*

La longitud, X metros, de los peces de una especie dada tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{para } 0 \le x \le 0,5 \\ 0,5a\,(1-x), & \text{para } 0,5 \le x \le 1 \\ 0, & \text{resto de casos}. \end{cases}$$

(a) Compruebe que $a = 9,6$. *[3 puntos]*

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de la distribución. *[2 puntos]*

(c) Halle $\mathrm{P}(X < 0,6)$. *[2 puntos]*

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $5^{2n} - 24n - 1$ es divisible por 576 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. *[Puntuación máxima: 7]*

Una pequeña empresa de alquiler de coches tiene dos coches. Cada coche se puede alquilar cada vez por un día completo. El precio del alquiler es de 60 USD por coche y por día. El número de solicitudes que se reciben para alquilar un coche por un día completo puede ser modelizado mediante una distribución de Poisson de media igual a 1,2.

(a) Halle la probabilidad de que en un fin de semana dado se reciban tres solicitudes el sábado y ninguna el domingo. *[2 puntos]*

Durante un fin de semana de dos días, se han recibido un total de tres solicitudes.

(b) Halle el valor esperado de los ingresos totales por alquiler para ese fin de semana. *[5 puntos]*

10. *[Puntuación máxima: 6]*

La aceleración de un coche es igual a $\frac{1}{40}(60-v)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, siendo v su velocidad en $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Sabiendo que el coche parte de la posición de reposo, halle la velocidad del coche al cabo de 30 segundos.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) (i) Exprese la suma de los n primeros números enteros impares positivos utilizando la notación de sumatoria.

(ii) Compruebe que la suma del apartado anterior es igual a n^2.

(iii) Deduzca el valor de la diferencia entre la suma de los 47 primeros números impares positivos y la suma de los 14 primeros números impares positivos. *[4 puntos]*

(b) Sobre la circunferencia de un círculo se marca una serie de puntos distintos, de manera que formen un polígono. Las diagonales se dibujan uniendo todos los pares de puntos no adyacentes.

(i) Muestre en un diagrama todas las diagonales cuando hay 5 puntos.

(ii) Compruebe que el número de diagonales es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$, siendo n el número de puntos, para $n > 2$.

(iii) Sabiendo que hay más de un millón de diagonales, determine el menor número de puntos para el cual esto es posible. *[7 puntos]*

(c) Sea la variable aleatoria $X \sim B(n, p)$, de media igual a 4 y varianza igual a 3.

(i) Determine n y p.

(ii) Halle la probabilidad de que en un único experimento el resultado sea 1 o 3. *[8 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 22]*

Considere la ecuación diferencial $y\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$.

(a) (i) Compruebe que la función $y = \cos x + \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación diferencial.

(ii) Halle la solución general de la ecuación diferencial. Exprese la solución de la forma $y = f(x)$, incluyendo en la respuesta una constante de integración.

(iii) ¿Para qué valor de la constante de integración coincide su solución con la función dada en el apartado (i)? *[10 puntos]*

(b) Otra solución de la ecuación diferencial, para la cual $y = 2$ cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$, define una curva C.

(i) Determine la ecuación de C, expresando la respuesta de la forma $y = g(x)$, e indique el recorrido de la función g.

Una región R del plano xy está delimitada por C, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) Halle el área de R.

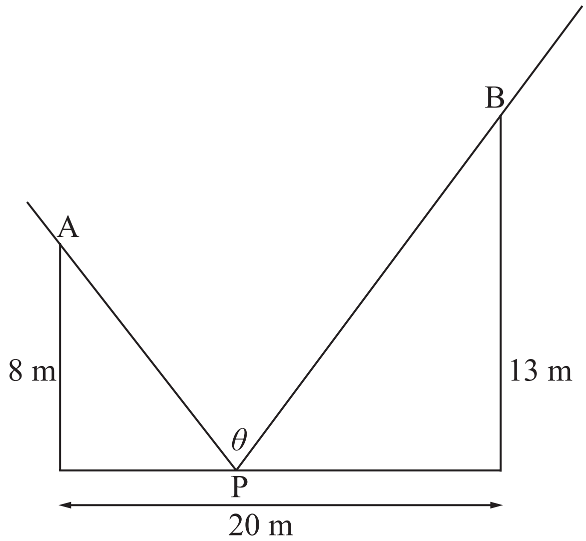
(iii) Halle el volumen que se genera cuando la parte de R que se encuentra por encima de la recta $y = 1$ se hace girar 2π radianes en torno al eje x. *[12 puntos]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 19]*

Una calle recta de 20 metros de anchura está delimitada a ambos lados por dos paredes verticales paralelas, una de 13 metros de altura y la otra de 8 metros de altura. La intensidad de la luz que llega a un punto P situado en la calle, a nivel del suelo, es proporcional al ángulo θ, donde $\theta = \mathrm{A\hat{P}B}$, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle una expresión para θ en función de x, donde x es la distancia entre P y la base de la pared de 8 metros de altura. *[2 puntos]*

(b) (i) Calcule el valor de θ cuando $x = 0$.

(ii) Calcule el valor de θ cuando $x = 20$. *[2 puntos]*

(c) Dibuje aproximadamente la gráfica de θ, para $0 \le x \le 20$. *[2 puntos]*

(d) Compruebe que $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{5(744 - 64x - x^2)}{(x^2 + 64)(x^2 - 40x + 569)}$. *[6 puntos]*

(e) Utilizando el resultado del apartado (d), o de cualquier otro modo, determine para qué valor de x la intensidad de la luz en P es máxima. Dé la respuesta con una aproximación de cuatro cifras significativas. *[3 puntos]*

(f) El punto P se desplaza atravesando la calle a una velocidad de $0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Determine la razón de cambio de θ con respecto al tiempo, en el instante en que P se encuentra en el punto medio de la calle. *[4 puntos]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.